



TITLE:

離散化双線形モデルに基づくブーストコンバータ出力電圧の積分補償付非線形制御--II. --制御則の導出と実験による検証

AUTHOR(S):

後藤, 良介; 蛸原, 義雄; 萩原, 朋道

CITATION:

後藤, 良介 ...[et al]. 離散化双線形モデルに基づくブーストコンバータ出力電圧の積分補償付非線形制御--II. --制御則の導出と実験による検証. システム制御情報学会論文誌 2015, 28(7): 330-339

ISSUE DATE:

2015

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/236023>

RIGHT:

© 2015 システム制御情報学会 (The Institute of Systems, Control and Information Engineers); 発行元の許可を得て登録しています.

離散化双線形モデルに基づくブーストコンバータ出力電圧の 積分補償付非線形制御—II —制御則の導出と実験による検証*

後藤 良介[†]・蛸原 義雄[†]・萩原 朋道[†]

Nonlinear Control with Integral Compensation for Output Voltage of Boost Converters Based on Discretized Bilinear Model—II —Derivation of a Control Law and Verification by Experiments*

Ryosuke GOTO[†], Yoshio EBIHARA[†] and Tomomichi HAGIWARA[†]

This paper is concerned with nonlinear control with integral compensation for the output voltage of boost converters through the use of their discretized bilinear model. We first derive a nonlinear state feedback control law through Lyapunov stability theory, where we introduce a Lyapunov function candidate and maximize its decrement at each switching instant under a penalty on the control input. This approach is then modified to incorporate an integral action in the control law, and a method is provided for confirming the closed-loop stability under the modified control law. We next apply the design method of the control law with integral compensation to the identified discretized bilinear model of a boost converter. Finally, we carry out control experiments with the designed control law, through which the effectiveness of the overall scheme of the present study is demonstrated.

1. はじめに

ブーストコンバータ [1–3] は直流電圧を昇圧できるパワーエレクトロニクス機器の一種であり、その構成が簡単であることからさまざまな電気製品で利用されている。一般的なコンバータの制御法として、状態の近似的な意味での平均化 [1,3] と動作点のまわりの線形化によって得られるモデルに基づくものがある。しかし、そのような方法はコンバータが本質的に有する非線形性を無視するものとなっており、その結果、制御性能の低下を招く可能性がある。そのため、そのような難点の回避を目指したコンバータのさまざまな制御法が研究されている [4,5]。

本論文は、コンバータのスウィッチング動作を厳密に取り扱うことを通して導かれる、第 I 部 [6] で提案した離散化双線形モデルに基づく制御則の設計に関して論じるものであり、そのような制御則の導出法とその妥当性ならびに有効性について考察する。その際とくに、積分補償を導入することで定常偏差の抑制を行う。

コンバータの振舞いが離散化双線形モデルで精度よく

表せることは第 I 部 [6] で同定実験を通して検証されている。本論文は、この離散化双線形モデルに基づき離散時間の非線形制御則を直接的に導出するものであって、コンバータの非線形性を直接的に考慮した設計を行うことになるため、高い制御性能を達成するうえで有用なアプローチとなることが期待される。ただし、積分補償を導入した場合には、この設計手法は、閉ループ系の（あるいは、対象が非線形系であることを念頭においたうえでより厳密に言えば、目標とする出力電圧に対応する平衡点の）安定性を理論的に保証するものとはいえない。そこで、設計により得られた非線形制御則による閉ループ系が安定であることを検証するための安定解析法をさらに与える。最後に、第 I 部で得た離散化双線形モデルの同定結果に基づき設計した制御則のもとでの出力電圧制御実験を行い、閉ループ系の安定性も含めて、導出した制御則の有効性を検証する。

2. ブーストコンバータの離散化双線形モデル

本節ではブーストコンバータの離散化双線形モデル [6] について述べる。ブーストコンバータの回路図は Fig. 1 で表される。本論文では、同定実験によるものではなく理論的モデルを扱う状況ではこの回路においてインダクタの等価直列抵抗 (R_L) とスイッチの導通時抵抗 (R_S)

* 原稿受付 2014 年 10 月 3 日

[†] 京都大学 大学院 工学研究科 Graduate School of Engineering, Kyoto University; Kyotodaigaku-Katsura, Nishikyo-ku, Kyoto 615-8510, JAPAN

Key Words: boost converters, discretization, bilinear systems, identification, nonlinear state feedback.

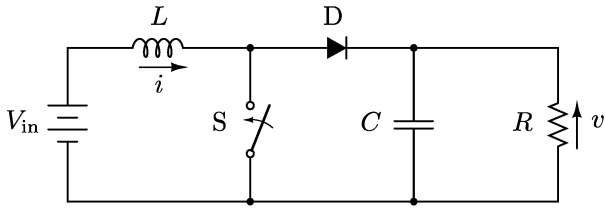


Fig. 1 Boost converter

およびダイオードの立ち上がり電圧 (E_D) を考慮する。離散化双線形モデルは、ブーストコンバータの連続時間状態方程式を離散化し、適切な近似を施すことで導かれる。状態変数は図に示す向きにインダクタの電流 i と出力電圧 (キャパシタの電圧) v をとり、 $x = [i \ v]^T$ で定義する。スイッチが OFF から ON となる時刻 (スイッチング時刻) $t = kT$ での状態変数を x_k 、時間区間 $[kT, (k+1)T)$ での制御入力 (デューティ比) を μ_k とおく。このとき、離散時間状態方程式は、ブーストコンバータを駆動する電源の電圧を V_{in} として次の形で記述できる (詳細は [6] を参照されたい)。

$$x_{k+1} = A_{\mu_k} x_k + B_{\mu_k} V_{in} + B'_{\mu_k} E_D \quad (1)$$

つぎに、係数行列のデューティ比 μ_k に関する依存性を以下のように線形近似する (やはり詳細は [6] を参照されたい)。

$$A_{\mu_k} \simeq \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \mu_k \quad (2)$$

$$B_{\mu_k} \simeq \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1 \mu_k, \quad B'_{\mu_k} \simeq \tilde{B}'_0 + \tilde{B}'_1 \mu_k \quad (3)$$

さらに、目標となる出力電圧を与えるデューティ比を μ^* 、このときの定常状態を x^* とおく。定常状態からの偏差を

$$z_k := x_k - x^*, \quad w_k := \mu_k - \mu^* \quad (4)$$

として、(1) 式は次式の離散化双線形モデルとして書き直せる。

$$z_{k+1} = A^* z_k + (\tilde{A}_1 z_k + s^*) w_k \quad (5)$$

ただし、 $A^* := A_{\mu^*} \simeq \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 \mu^*$ 、 $s^* := \tilde{A}_1 x^* + \tilde{B}_1 V_{in} + \tilde{B}'_1 E_D$ である。

3. 非線形制御則の導出

本節では、離散化双線形モデルに基づいたブーストコンバータ出力電圧に対する非線形制御則を導出する。

3.1 安定化制御則の導出

本項では、離散化双線形モデル (5) をもとに、リアプノフ関数を用いて非線形状態フィードバック制御則を導く。ただし、本項の議論に基づき次項でさらに一般化した扱い (積分補償の導入) のもとで類似の議論を行うことを踏まえ、双方の議論の共通性に関して見通しをよくする目的で、(5) 式を以下のように書きなおしておく。

$$z_{k+1} = A z_k + B(z_k) w_k \quad (6)$$

まず本項では、この制御対象において w が恒等的に 0 のときの平衡点 $z=0$ を大域的漸近安定とし (この条件を満たすとき、以下では簡単のため、閉ループ系が安定であるという)、かつ良好な収束特性を与える制御則の導出を考える。ただし、 A は Schur 安定とする。(5) 式との対応づけから $A = A^*$ であり、 $w_k = 0$ として (すなわち、デューティ比 μ_k を一定値 μ^* として) 動作させた場合には μ^* によらずコンバータが周期定常状態に落ち着くことから、この仮定は妥当である。

つぎに、 P を正定行列としてリアプノフ関数の候補 $V(z) = z^T P z$ を考える。閉ループ系の安定性を考えるうえで、(6) 式の状態遷移に着目してリアプノフ関数の時間差分に相当する

$$\begin{aligned} \Delta V(z, w) \\ = [Az + B(z)w]^T P [Az + B(z)w] - z^T P z \end{aligned} \quad (7)$$

が重要な役割を果たす。ただし、本論文では、(6) 式において制御入力 w_k が過大な場合にはコンバータの制御入力であるデューティ比 $\mu_k = w_k + \mu^*$ が 0 と 1 の間の値をとるべきであるという制約を満たさなくなる可能性に留意する必要がある。そこで、(6) 式における制御入力の大きさを考慮したことに相当する rw^2 の項を (7) 式に付加した $\Delta V(z, w) + rw^2$ を本論文では考えることにする。ただし、 $r > 0$ とする。ここで、もし適当な関数 $w = f(z)$ と $\alpha > 0$ が存在して、任意の z に対し $\Delta V(z, w) + rw^2$ すなわち $\Delta V(z, f(z)) + rf(z)^2$ が条件

$$\Delta V(z, f(z)) + rf(z)^2 < -\alpha \|z\|^2 \quad (8)$$

を満たせば、 $\Delta V(z, f(z)) < -\alpha \|z\|^2$ も成立することは明らかであり、したがって、 $w_k = f(z_k)$ を制御則とした閉ループ系の原点は大域的漸近安定となる [7, 8]。本論文では、上記の条件 (8) の左辺を最小化する関数 $f(z)$ を求めることによって (8) 式を成立させるという立場をとることにする。この立場は、基本的には $\Delta V(z, f(z))$ と $rf(z)^2$ の両方をできるだけ小さくしたいという立場ととらえられるが、制御器設計の視点からのその意味は以下の通りである。

$w = f(z)$ であるから、前者については、(7) 式に示したリアプノフ関数の時間差分を小さくすること、すなわちリアプノフ関数ができるだけ早く減少するという要求を意味しており、これは状態 z_k ができるだけ早く 0 に収束してほしいという速応性の要求に対応する。一方、後者は rw^2 に対応しており、すでに述べた通り (6) 式における制御入力が増大することを避けるという要求に対応する。結局、これら二つの要求を総合的にとらえて (8) 式左辺を最小化するという方針を本論文ではとるようになるが、背景にあるリアプノフ関数の候補 $V(z) = z^T P z$ に関しては、 A が Schur 安定であるという仮定に基づき、正定行列 Q を用いた次式のリアプノフ方程式の解 P を用いて定めるものとする。

$$A^T P A - P = -Q \quad (9)$$

(8) 式左辺を最小化するために $\Delta V(z, w) + r w^2$ を考え、(9) 式に注意して w に関してこれを平方完成すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta V(z, w) + r w^2 \\ = (r + B^T(z) P B(z)) \left(w + \frac{B^T(z) P A z}{r + B^T(z) P B(z)} \right)^2 \\ - z^T Q z - \frac{(B^T(z) P A z)^2}{r + B^T(z) P B(z)} \end{aligned} \quad (10)$$

したがって、

$$w = -\frac{B^T(z) P A z}{r + B^T(z) P B(z)} =: f(z) \quad (11)$$

のとき、 $\Delta V(z, w) + r w^2$ は w に関して最小化される。また、 $\lambda_{\min}(Q)$ を Q の最小固有値として、 $\lambda_{\min}(Q) > \alpha > 0$ を満たす α をとれば $\Delta V(z, w) + r w^2 < -\alpha \|z\|^2$ が成り立つ。よって、(11) 式の $f(z)$ を用いた離散時間安定化非線形状態フィードバック制御則 $w_k = f(z_k)$ が導かれた。

(6) 式と離散化双線形モデル (5) 式との対応づけに注意すれば、結局、次式の安定化非線形状態フィードバック制御則が得られた。

$$w_k = -\frac{(\tilde{A}_1 z_k + s^*)^T P A^* z_k}{r + (\tilde{A}_1 z_k + s^*)^T P (\tilde{A}_1 z_k + s^*)} \quad (12)$$

ただし、 P は正定行列 $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ を適当に選んだときの以下のリアプノフ方程式の解として定まる。

$$A^{*T} P A^* - P = -Q \quad (13)$$

3.2 積分補償付制御則の導出

前項で導出した制御則では、ブーストコンバータの制御実験において、モデル化誤差の存在のために定常偏差が生じてしまう。本項では定常偏差を抑制するために積分補償を導入した制御則を前節の議論をもとに考える。

目標電圧を v_{ref} とし、系 (1) に積分補償器を追加した次の拡大系を考える。

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{\mu_k} x_k + B_{\mu_k} V_{\text{in}} + B'_{\mu_k} E_D \\ \zeta_{k+1} = \zeta_k + (v_{\text{ref}} - C_v x_k) \end{cases} \quad (14)$$

ここで $C_v = [0 \ 1]$ であり、よって $C_v x_k$ は出力電圧 v_k を表している。(14) の第 1 式より μ_k を一定値 μ にすれば、状態変数の定常値 x_∞ は次式で与えられる。

$$x_\infty = (I - A_\mu)^{-1} (B_\mu V_{\text{in}} + B'_\mu E_D) \quad (15)$$

この関係式より、 $C_v x_\infty = v_{\text{ref}}$ となる μ を数値的に求められるので、この値を (2. で与えた文字の定義に従い) μ^* とおく。また、 $\mu = \mu^*$ のときの上式の x_∞ を x^* とおく。前項と同様に (4) 式でこの定常状態からのずれを定

義し、(2), (3) 式の近似を適用すれば、(14) 式は次式となる。

$$\begin{cases} z_{k+1} = A^* z_k + (\tilde{A}_1 z_k + s^*) w_k \\ \zeta_{k+1} = \zeta_k - C_v z_k \end{cases} \quad (16)$$

$\eta_k = [z_k^T \ \zeta_k]^T$ を状態変数として上記の系は次式で表せる。

$$\eta_{k+1} = A_0 \eta_k + B(\eta_k) w_k \quad (17)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -C_v & 1 \end{bmatrix}, \quad B(\eta_k) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 z_k + s^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

この系は (6) 式と同じ形式であるので、これに前項での議論を適用して制御則を導出したいが、この A_0 は Schur 安定でないため、リアプノフ関数を用いたその方法はそのまま利用できない。そこで積分器をわずかに安定側にずらした (小さな $\delta > 0$ を用いて (14) の第 2 式右辺の ζ_k を $(1-\delta)\zeta_k$ におきかえた) 補償器を考える。さらにこれを接続した場合に (16) 式に対応する形で導かれる

$$\eta_{k+1} = A_\delta \eta_k + B(\eta_k) w_k \quad (19)$$

$$A_\delta = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -C_v & 1-\delta \end{bmatrix}, \quad B(\eta_k) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 z_k + s^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

を安定化する制御則を考える。このとき、(A^* の Schur 安定性から) A_δ は Schur 安定となるので前項での議論が適用が可能であり、次式の制御則を得ることができる。

$$w_k = -\frac{B^T(\eta_k) P A_\delta \eta_k}{r + B^T(\eta_k) P B(\eta_k)} \quad (21)$$

ただし、 P は正定行列 $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ を適当に選んだときのリアプノフ方程式 $A_\delta^T P A_\delta - P = -Q$ の解として定まる。

つぎに、厳密な積分器を接続した系 (17) に対する非線形状態フィードバック制御則を、上の制御則において A_δ の部分のみを A_0 に書きなおした次式で与えることとする。

$$w_k = -\frac{B^T(\eta_k) P A_0 \eta_k}{r + B^T(\eta_k) P B(\eta_k)} \quad (22)$$

$\eta = [z^T \ \zeta]^T$ の分割に合わせ P を

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad P_{11} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad P_{12} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, \quad P_{22} \in \mathbb{R} \quad (23)$$

と分割して表すと、この制御則は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} w_k = & -\frac{(\tilde{A}_1 z_k + s^*)^T P_{11} A^* z_k}{r + (\tilde{A}_1 z_k + s^*)^T P_{11} (\tilde{A}_1 z_k + s^*)} \\ & - \frac{(\tilde{A}_1 z_k + s^*)^T P_{12} (-C_v z_k + \zeta_k)}{r + (\tilde{A}_1 z_k + s^*)^T P_{11} (\tilde{A}_1 z_k + s^*)} \end{aligned} \quad (24)$$

P_{11} を (12) 式の P と対応させて考えれば、上式は積分補

償として右辺第2項の分だけ (12) 式を補正したものと解釈できる。

しかし、上記の積分補償を施した制御則の与え方に関する議論は、閉ループ系の（目標電圧に対応する平衡点の）安定性を必ずしも保証していない。そのため、上記制御則に対応する閉ループ系の安定性を解析する方法を与えることは重要と考えられる。この問題については次節で検証を行う。

3.3 制御則実装時の注意点

前々項と前項とで2種類の非線形制御則の導出を行ったが、これらを実装する場合にはさらに注意しなければならない点が存在する。一つ目は制御則の演算時間に関するものであり、とくにコンバータにおいてはスイッチング区間 $[kT, (k+1)T)$ のどのタイミングでスイッチングを行うかを決定するのがデューティ比 μ_k の値であるから、1スイッチング周期分の時間をかけて μ_k の計算を行えばよいということにはならない。この問題を回避するため、状態方程式から次のスイッチング時刻の状態を予測し、その予測値に基づき、現スイッチング区間においては次のスイッチング区間における制御入力（デューティ比）の演算を行う、という形での制御則の実装を行う。すなわち、積分補償を導入した制御則を例にとりて説明すると、時刻 $t = kT$ において状態 z_k を測定したのち (w_k, ζ_k) はすでに演算されている、次の時刻の状態を (17) 式より予測する。そして、これを用いて次のスイッチング時刻までに制御入力 w_{k+1} を (22) 式に基づき演算する。なお、この方法を適用する場合には制御入力の初期値 μ_0 をあらかじめ設定する必要がある。

二つ目の点は、演算された入力（デューティ比）が、それが満たすべき物理的制約 $0 \leq \mu \leq 1$ を必ずしも満たすわけではないということである。この問題に対しては、制御動作時に利用を許すデューティ比の上限 $\mu_{\max} \leq 1$ と下限 $\mu_{\min} \geq 0$ を ($\mu_{\min} < \mu^* < \mu_{\max}$ となる範囲で) あらかじめ定めておき、演算で得た値が上限を上回れば上限の値に、下限を下回れば下限の値にデューティ比を設定するという飽和動作をとる。このように制御入力を定めても、3.1 の議論において閉ループ系の平衡点が安定となることを保証できる。以下でそのことを示す。まず、演算された入力

$$\mu = \mu^* + w = \mu^* - \frac{B^T(z)PAz}{r + B^T(z)PB(z)} \quad (25)$$

が $\mu > \mu_{\max}$ となった場合を考える。飽和動作によりこのときの入力を $\mu = \mu_{\max}$ と定めたとすると、これに代えて $\mu^* + w = \mu_{\max}$ を満たすように修正した w は演算により得た値より小さいため

$$0 < w < -\frac{B^T(z)PAz}{r + B^T(z)PB(z)} \quad (26)$$

を満たすことになる。このとき (10) 式から $-z^T Q z$ の項

を除いた w の二次式は負となるので、3.1 と同じ α を用いて $\Delta V(z, w) < -\alpha \|z\|^2$ となることからわかる。同様にして、演算結果が $\mu < \mu_{\min}$ となった場合に入力を $\mu = \mu_{\min}$ と定める飽和動作をさせても $\Delta V(z, w) < -\alpha \|z\|^2$ となることがいえる。このことはどの時刻においても成り立つので、閉ループ系は安定となる。

4. 積分補償のもとでの閉ループ系の安定解析

前節では2種類の非線形制御則を導いたが、このうち、積分補償を含む制御則を用いたものは、安定性を理論的に保証するものとはなっていなかった。そこで本節では、この制御則を用いた場合の閉ループ系における平衡点の安定性を解析する方法を与え、これを実際に適用した結果を紹介する。具体的には、第I部 [6] において同定実験を行ったコンバータ（素子の公称値などは Table 1 に示す通り）において、損失抵抗などもこの表に示すものとしたうえで理論的な離散化双線形モデルをまず導き、続いてこれに対して Table 2 に示すパラメータで制御則の設計を行った。なお、このときの目標電圧 4.5V に対応するデューティ比は、上記の離散化双線形モデルに基づき $\mu^* = 0.4306$ と計算された。一方、前節で考えた制御動作時のデューティ比の上下限は本論文を通して（同定実験で用いた同定信号のデューティ比の範囲 $0.3 \leq \mu \leq 0.7$ の範囲よりもやや広くとった） $\mu_{\min} = 0.2$, $\mu_{\max} = 0.8$ とするが、この範囲での飽和動作を適用しない場合と適用した場合の両方を考え、いずれの場合の解析においても、上記の制御則のもとで閉ループ系における平衡点の（コンバータの動作範囲を考慮して適切な範囲をカバーした意味での局所的漸近）安定性が確認できることを示す。

4.1 安定解析の方針

本項では以降で行う安定解析の方針を述べる。安定性の議論には、前節と同様にリアプノフ関数を用いる。制御則設計時に用いた P によりリアプノフ関数の候補を

Table 1 Circuit parameters

| 記号 | 値 | 記号 | 値 |
|----------|---------------|-------|---------------|
| V_{in} | 3 V | E_D | 0.3 V |
| L | 1.0 mH | R_L | 2.6 Ω |
| C | 10 μ F | R | 100 Ω |
| r_1 | 1 Ω | r_2 | 10 k Ω |
| R_S | 0.12 Ω | T | 100 μ s |

Table 2 Design parameters

| 記号 | 値 | 記号 | 値 |
|----------|-----------------------|-----------|-------|
| δ | 0.005 | r | 10000 |
| Q | diag(1000, 1000, 2.5) | v_{ref} | 4.5 V |

$V(\eta) = \eta^T P \eta$ とし, (7) 式のような形でリアプノフ関数の時間差分 $\Delta V(z, w)$ が与えられている場合を考える. 系 (17) に非線形状態フィードバックを施したときの閉ループ系における平衡点 $\eta = 0$ の安定性およびそれに対応する状態の吸引領域に関する次の定理が成り立つ [7, 8].

【定理 1】 系 (17) に対する状態フィードバック制御則が $w_k = f(\eta_k)$ で与えられているものとする. c を正定数として次の集合を定義する.

$$D_1 := \{\eta \mid V(\eta) \leq c\} \quad (27)$$

$$D_2 := \{\eta \mid \Delta V(\eta, f(\eta)) < 0\} \cup \{0\} \quad (28)$$

$D_1 \subset D_2$ が成り立つならば, 初期値 η_0 を $\eta_0 \in D_1$ を満たすようにとったとき制御則 $w_k = f(\eta_k)$ により状態 η_k は D_1 内に留まり, かつ $\eta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) となる.

上述の定理より, $\Delta V(\eta, f(\eta)) < 0$ となる η の集合を調べることが安定性を解析するうえで重要となる. 以降では, ある初期値 η_0 が与えられたとき, 適当な c に対する D_1 のもとで $\eta_0 \in D_1$ が成立し, しかも積分補償付制御則により η_k が D_1 内に留まりつつ $\eta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) となることを, 簡単のため, 「初期値 η_0 に関して閉ループ系が安定になる」とよぶことにする.

ここで, 積分補償付制御則 (22) のもと $\Delta V(\eta, w)$ を計算すると次式となる.

$$\begin{aligned} \Delta V(\eta, w) = & \eta^T (A_0^T P A_0 - P) \eta \\ & - \frac{2r + B^T(\eta) P B(\eta)}{r + (B^T(\eta) P B(\eta))^2} (B^T(\eta) P A_0 \eta)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

上式右辺を $g(\eta)$ とおき, 以降では $g(\eta) < 0$ となるような η の集合について考察を進めていく. 定理 1 より, $V(\eta) \leq c$ で表される楕円体の閉領域 D_1 と $g(\eta) < 0$ なる η と $\{0\}$ を合わせた集合 D_2 を比較することで安定解析が可能となる.

4.2 飽和動作を考えない場合の安定解析

本項ではまず, 飽和動作を考えない場合の安定解析法を述べる. まず, $g(\eta)$ を次式のように変形する.

$$g(\eta) = \eta^T Q(\eta) \eta \quad (30)$$

$$\begin{aligned} Q(\eta) = & A_0^T P A_0 - P \\ & - \frac{2r + B^T(\eta) P B(\eta)}{(r + B^T(\eta) P B(\eta))^2} A_0^T P B(\eta) B^T(\eta) P A_0 \end{aligned} \quad (31)$$

このように変形すると, $Q(\eta) < 0$ という条件が $g(\eta) < 0$ となるための十分条件となっていることがわかる. ただし, 厳密には, $\eta = 0$ の場合だけは, $Q(\eta) < 0$ としても $g(\eta) < 0$ を意味しないが, 定理 1 における D_2 は $\eta = 0$ を必ず含む形で定義されるので, $Q(\eta) < 0$ を満たす η の集合は D_2 の部分集合となる. そこで, この定理を念頭におき, 以下この集合に関して考察を行う.

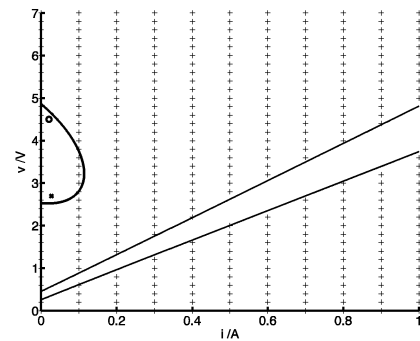


Fig. 2 Region corresponding to $Q(\eta) < 0$ and ellipsoid $V(\eta) \leq 10000$ sliced with the plane $\zeta = -6$ containing the initial value

$\eta = [z^T \zeta]^T$ であることと (18) 式から, (31) 式中の $B(\eta)$ は実際には ζ に依存しない z の関数であるので, $Q(\eta) < 0$ で表される領域は z 平面に射影して図示することができる. いま考えている制御系に対するこの範囲を Fig. 2 に示す. 直線状の実線が境界線を示しており, 点が打たれている側が $Q(\eta) < 0$ を満たす範囲となっている. ただし, 実際には $z = x - x^*$ ではなく, $x = [i \ v]^T$ に対して図を描いている. この理由は以下の通りである. いま, ブーストコンバータが連続導通モード [1–3] として動作する回路パラメータを考えているので, $i \geq 0$ であり, また物理的に $v \geq 0$ である. したがって実際にはこの範囲に限定して考えてよい. z 平面では i, v でみたときの第一象限がどの位置にあるのかわかりづらいため, $x = [i, v]^T$ 平面を用いて図を描いた. この Fig. 2 に関して, $V(\eta) \leq c$ で表される楕円体の z 平面への正射影 (を x 平面でみたもの) がこの図に示した範囲の内部に存在すれば, 定理 1 における $D_1 \subset D_2$ が成立することが容易にわかる. よって, そのような c について, 初期値 $\eta_0 \in D_1$ に関して閉ループ系は安定となる.

以上の議論に基づき, いま考えている積分補償を施した制御系において飽和動作を考えないときの閉ループ系の平衡点の安定性を検証する. ただし, ブーストコンバータの状態の初期値はスイッチが OFF のときの定常状態を考え, $x_0 = [0.027 \ 2.7]^T$ とする. また, 積分器の初期値を $\zeta_0 = -6$ とする¹. さらに, ここで考えている目標電圧 4.5 V (Table 2 参照) に対して, 離散化双線形モデルに基づき算出される状態の定常値は $x^* = [0.021 \ 4.5]^T$ である. そこで, ここでは積分器の初期値 ζ_0 を考慮した η の初期値 $\eta_0 = [0.006 \ -1.8 \ -6]^T$ ($z_0 = x_0 - x^* = [0.006 \ -1.8]^T$) を含むような楕円体 D_1 として, $V(\eta) \leq c = 10000$ をとる. Fig. 2 にその楕円体の $\zeta = -6$ における切り口を曲線の実線で表す. ただし, 図において \times は初期値を表し, また, o は平衡点をこの

¹ $\zeta_0 = 0$ とすると応答にオーバーシュートが生じることが確認されている. このように初期値を負の値に設定することでオーバーシュートを軽減することができる.

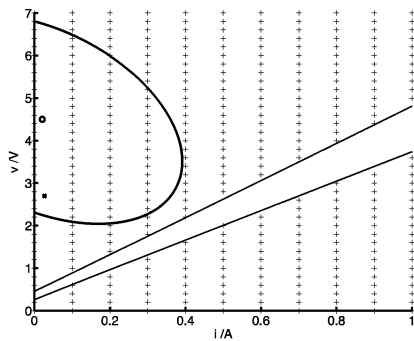


Fig. 3 Orthogonal projection of ellipsoid $V(\eta) \leq 10000$ to the plane $\zeta = 0$

切り口の平面に正射影したものを表している。一方、この楕円体自体の z 平面 ($i-v$ 平面) への正射影をあらわしたものを Fig. 3 に示す。これらの図より、上記の楕円体が初期値 η_0 を含み、その正射影が $Q(\eta) < 0$ に対応する z の範囲に入っていることが確認できる。すなわち、初期値 η_0 に関して閉ループ系は安定であるといえる。

4.3 飽和動作を考える場合の安定解析

本項では、積分補償付非線形制御則において飽和動作 (3.3 参照) を行った場合の安定解析法について述べる。以下、前提として、飽和動作を考えない場合には、積分補償付非線形制御則のもとで任意の初期値 $\eta_0 \in D_1$ に関して閉ループ系が安定であることが、定理 1 によって保証されているものとする。この前提のもと、飽和動作を行ってもその安定性が損なわれないことを示すには、次の方法が考えられる。

まず、下側で飽和する場合の方法を述べる。このとき、制御則により定められた w は不等式 $w < w_{\min}$ ($:= \mu_{\min} - \mu^*$) を満たしている。制御入力 w は η の関数であるから、この不等式を満たす η の集合 $D_{w,\min}$ を以下のように定義できる。

$$D_{w,\min} := \left\{ \eta \mid -\frac{B^T(\eta)P_\delta A_0 \eta}{B^T(\eta)P_\delta B(\eta) + r} < w_{\min} \right\} \quad (32)$$

また、 $\Delta V(\eta, w_{\min}) < 0$ を満たす η に 0 を加えた集合を $D_{2,\Delta V,\min}$ とおく。

$$D_{2,\Delta V,\min} := \{\eta \mid \Delta V(\eta, w_{\min}) < 0\} \cup \{0\} \quad (33)$$

さらに、下側における飽和動作も含めた積分補償付非線形制御則を $w_k = f_{\min}(\eta_k)$ とおき、次の領域 $D_{2,\min}$ を定義する。

$$D_{2,\min} := \{\eta \mid \Delta V(\eta, f_{\min}(\eta)) < 0\} \cup \{0\} \quad (34)$$

このとき、 $(D_{w,\min} \cap D_1) \subset (D_{2,\Delta V,\min} \cap D_1)$ が成り立つば (すなわち、下側の飽和動作が生じた場合にも、飽和した制御入力のもとリアプノフ関数が減少するならば)、前提条件 (飽和動作が生じないときに関する上述

のもの) と合わせて $D_1 \subset D_{2,\min}$ が成立する。したがって、再び定理 1 より、下側における飽和動作も含めた積分補償付非線形制御則によって、初期値 $\eta_0 \in D_1$ に関して閉ループ系が安定になることがわかる。上側で飽和した場合においても同様に $D_{w,\max}$, $D_{2,\Delta V,\max}$ を定義し、 $(D_{w,\max} \cap D_1) \subset (D_{2,\Delta V,\max} \cap D_1)$ が成立すれば安定性が損なわれないことがわかり、これらの結果をもって飽和動作を行った場合においても安定性が損なわれないことを示すことが可能である。以下、実際にこの方法を $\mu_{\min} = 0.2$, $\mu_{\max} = 0.8$ とした制御入力の飽和動作をさせた場合に適用して安定解析を行う。

まず、飽和動作を行わない場合については、初期値 $\eta_0 = [0.006 \ -1.8 \ -6]^T$ に関して閉ループ系が安定となることを前項ですでに示している (このとき、 D_1 の c は 10000 としており、この値は以下でも同じとする)。ここでは、 ζ をパラメータとして固定するごとに決まる $D_{w,\min}$ などの切り口を平面に図示することで、上述の包含関係が成り立つことを図式的に示す。最初に、下側で飽和する場合を考える。まず、 $\zeta = 0$ としたときの二つの領域 $D_{w,\min}$, $D_{2,\Delta V,\min}$ の切り口を Fig. 4 の (a), (b) にそれぞれ示す。(a) において・で表されている部分が $D_{w,\min}$ の切り口、(b) において+で表されている部分が $D_{2,\Delta V,\min}$ の切り口であり、図 (c) においてはこれらの切り口を重ねつつ、楕円体 D_1 の切り口¹ も示してある。この図より、 $\zeta = 0$ のときには $D_{w,\min} \cap D_1$ の切り口が $D_{2,\Delta V,\min} \cap D_1$ のそれに含まれていることがわかる。

$\eta \in D_1$ のとき、 ζ のとりうる範囲は $|\zeta| \leq 8.0989$ となる。そこで、 ζ をたとえば $\zeta = -8, -4, 4, 8$ と固定し、それぞれの場合について二つの領域の切り口を楕円体 D_1 の切り口とともに Fig. 5 に示す。これらの図において $D_{w,\min} \cap D_1$ の切り口が空集合となっている場合² も含めて $\zeta = 0$ のときと同じ包含関係が成り立っていることがわかる。すべての ζ にわたって切り口を描くことは不可能ではあるが、さらに細かく刻んだ ζ においても切り口に関して同様のことが成り立つことは確認されており、 $(D_{w,\min} \cap D_1) \subset (D_{2,\Delta V,\min} \cap D_1)$ が成り立っていると考えられる。すなわち、下側における飽和動作を行っても安定性は損なわれない。上側の飽和動作に関しても、同様の方法で安定解析が可能であり、同様の包含関係が成り立つことが確認できる。以上より、積分補償付制御則に飽和動作を含めても、その安定性が損なわれることはないことがわかる。

¹Fig. 4(c) における楕円は、楕円体 $D_1: V(\eta) \leq c$ の $\zeta = 0$ における切り口であるため、この楕円体の平面 $\zeta = 0$ への正射影を表した Fig. 3 の楕円よりも小さい。

²そのような切り口が存在しないということは、対応する ζ において入力が飽和しえないことを意味する。

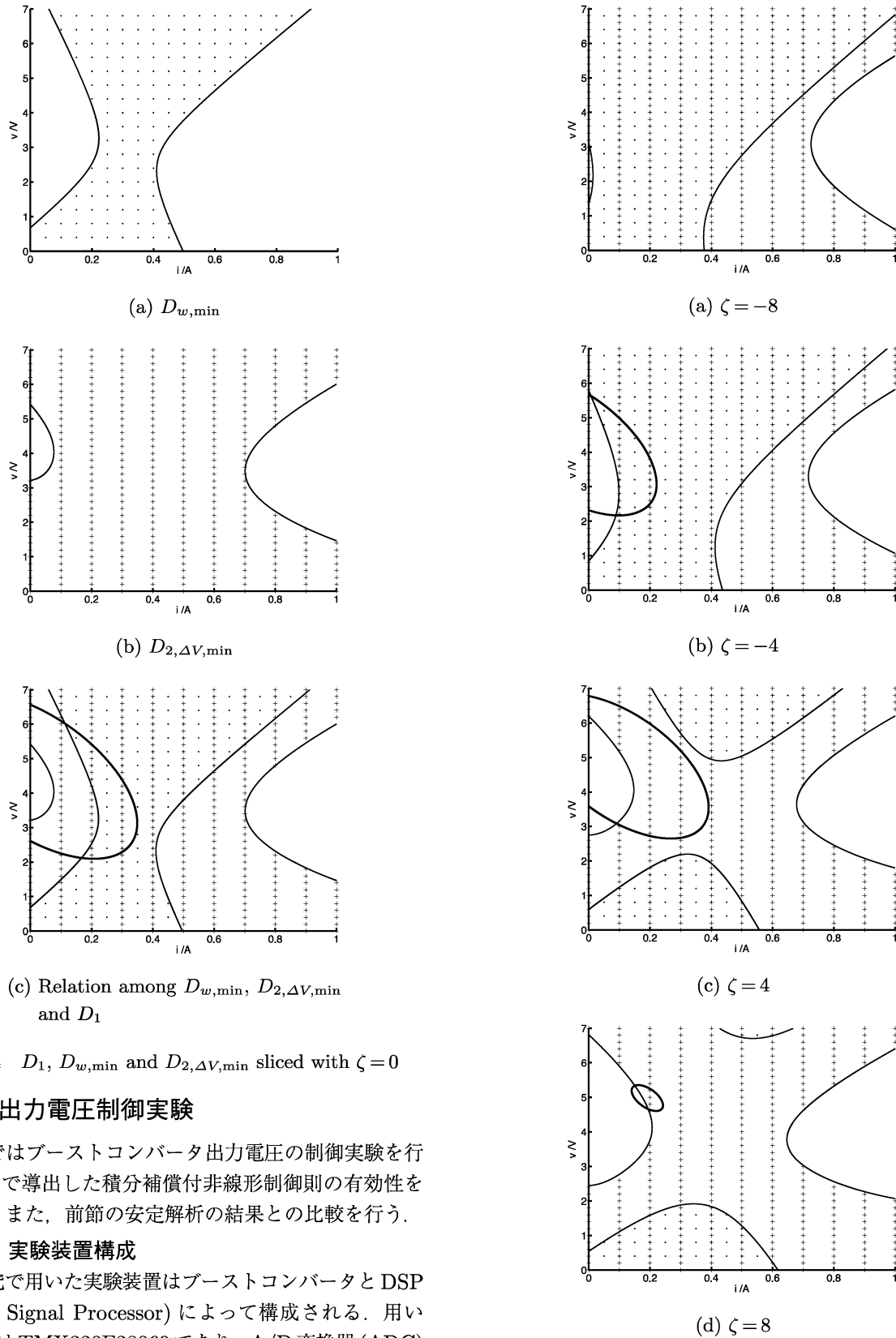


Fig. 4 D_1 , $D_{w,\min}$ and $D_{2,\Delta V,\min}$ sliced with $\zeta=0$

5. 出力電圧制御実験

本節ではブーストコンバータ出力電圧の制御実験を行い、3.2で導出した積分補償付非線形制御則の有効性を検証し、また、前節の安定解析の結果との比較を行う。

5.1 実験装置構成

本研究で用いた実験装置はブーストコンバータとDSP (Digital Signal Processor) によって構成される。用いたDSPはTMX320F28069であり、A/D変換器(ADC)とPWM信号を生成する機構が内蔵されている。これにより電圧(電流)の測定を行って制御入力を演算し、適切なデューティ比を持つPWM信号をスイッチとなるMOSFETへ入力することができる。実際に作成したブーストコンバータを含む実験装置の構成図をFig.6に

Fig. 5 D_1 , $D_{w,\min}$ and $D_{2,\Delta V,\min}$ sliced with other planes (saturation from below)

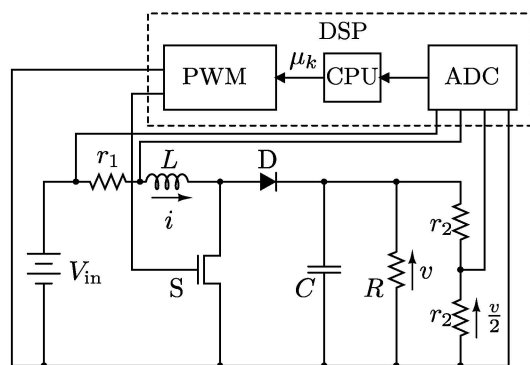


Fig. 6 Circuit overview

示す。コンバータのパラメータ（素子の公称値など）は Table 1 に示したものと同一であり、これらは第 I 部 [6] で同定実験を行ったときと同じでもある。詳細については第 I 部を参照されたい。

5.2 出力電圧制御実験

本項では、上記のブーストコンバータに対し、Table 2 の設計パラメータのもと、3.2 の議論に沿って積分補償付非線形制御則を設計したうえで 3.3 の議論に基づいて実装し、出力電圧制御実験を行う。非線形制御則の設計に際して、コンバータの離散化双線形モデルは Table 1 のパラメータに基づく理論的なものではなく、第 I 部 [6] で求めた同定モデルを用いる。また、制御実験においては、スイッチが OFF の定常状態から制御を開始し、周期定常状態に落ちつくまでの応答を調べる。

同定モデルと (15) 式に基づく計算 (3.2 参照) から、目標電圧 4.5V を与えるデューティ比は $\mu^* = 0.493$ となった。この μ^* の値は 4. の冒頭で示した (Table 1 のパラメータに基づいて計算した) 値 $\mu^* = 0.4306$ とは大きく乖離している。Table 1 における損失抵抗などの値は実測値やカタログ値に基づくものであるものの正確な測定は難しく、素子値の公称値からのずれなどの不確かさの要因も存在することから、表中の値をそのまま用いて計算した離散化双線形モデルでは、その信頼性は低いことがわかる。

一方、比較対象として、積分補償のもとでの LQ 最適な線形制御則による実験も同じ初期条件のもとで行う。この制御則に関する詳細は省略するが、素子値の公称値を利用して (ただし損失抵抗などは考慮したうえで) 導かれる平均値モデルに基づく一般的な制御則の設計法を念頭におき、以下のような手順により設計されたものである。

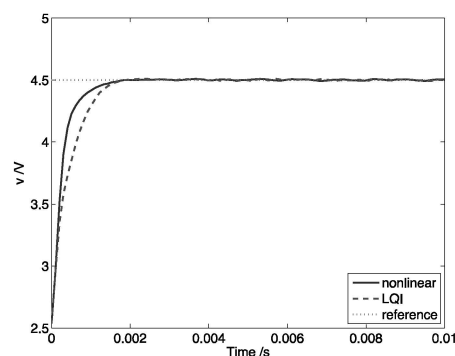
- (i) (スイッチング時刻での) 電圧の目標値が同じく 4.5V となる平衡点、および、対応するデューティ比 μ^* を求め、この平衡点の近傍で平均値モデルを線形化する。
- (ii) 上記の連続時間モデルを、0 次ホールドとサンプラ

を介してスイッチング周期で離散化する。

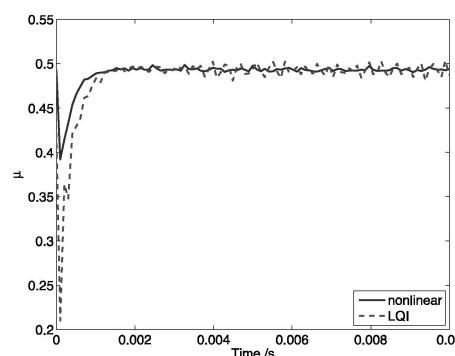
- (iii) 演算時間を考慮するために入力に 1 ステップのむだ時間を付加し、さらに出力側に積分補償器をひとつ付加した拡大系を考える。
- (iv) 上記の拡大系に関して平衡点からの偏差系を考え、その状態および入力に対する重み Q_{LQ} , r_{LQ} のもとでの最適な状態フィードバックゲインを定める。

重みに関して、具体的には Q_{LQ} は対角行列としたうえで積分器に対する重みのみ 10^7 とし、それ以外の四つの重みは r_{LQ} も含めていずれも 1 とした。これは、試行錯誤的に重みを選定する中で、積分器に対する重みがもっとも顕著に応答に影響を与える様子を踏まえて定めた最良の重みである。

制御則の演算時間に関連して設定が必要になるデューティ比の初期値 μ_0 は μ^* とし、積分器の初期値 ζ_0 は、応答のオーバーシュートに配慮した結果として、いずれの制御則においても $\zeta_0 = -6.6$ とする。また、ブーストコンバータの回路として、Table 1 に基づくもの (すなわち、同定を行ったときの回路) のほか、負荷抵抗 R と入力電圧 V_{in} の値の一方のみをそれぞれ 75 Ω , 3.3V に変化させたものも用意して同じ制御則のもと実験を行った。このときの出力電圧とデューティ比の応答を Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9 に示す。ただし、実線が積分補償付非線形

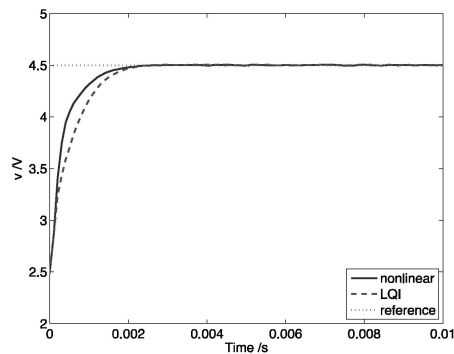


(a) Output voltage

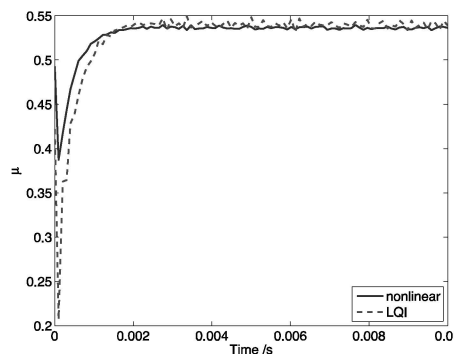


(b) Duty cycle

Fig. 7 Comparison of responses between nonlinear and linear control laws (nominal case)



(a) Output voltage

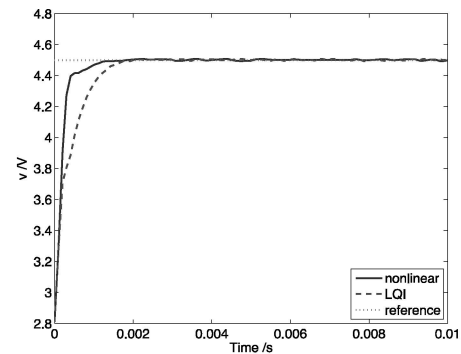


(b) Duty cycle

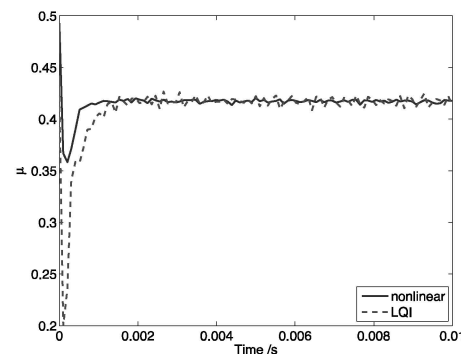
Fig. 8 Comparison of responses between nonlinear and linear control laws (with load variation)

制御則、破線が上記の線形な状態フィードバック制御則（積分補償付）の場合であり、一点鎖線は目標電圧を表している。これらの図から、負荷抵抗や入力電圧の値が変化した場合も含めて、閉ループ系の安定性が（ノミナルモデルに関しては前節で検証した通り）保たれ出力電圧が目標電圧に追従していることが確認できる。二つの制御則を比較すると、目標電圧に整定するまでの時間はほぼ同じであるといえる。しかし、応答の立ち上がりは非線形制御則の方がかなり改善されている。さらに、理由は明らかでないが、非線形制御則では制御入力（デューティ比）の応答が非常に滑らかなものとなっており、しかもそのピーク値が強く抑えられたものとなっている。

これらの点から本研究のアプローチの優位性が見られ、それはコンバータの非線形性を直接的に扱ったことの効果と考えることができる。ただし、注意しなければならないのは、本研究の非線形制御則は同定された離散化双線形モデルに基づいて設計されたのに対し、線形制御則の方は、実測値などに基づく損失などは考慮しているものの素子値の公称値を基本的にはそのまま信用して導出されたモデルに基づき行われており、その際のモデル化誤差は大きいと考えられる点である。したがって、上記の単純な比較のみに基づく議論は、必ずしも適切でないと考えられる。そこで、今度は逆に線形制御則の方に肩入れの過ぎた方法ではあるが、線形制御則を設計する際



(a) Output voltage



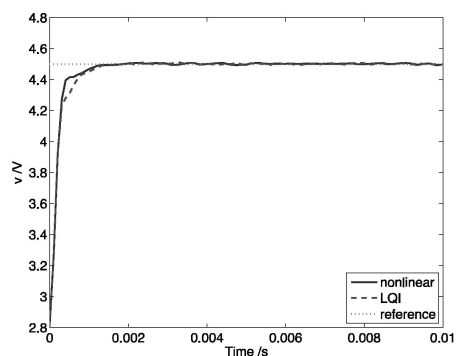
(b) Duty cycle

Fig. 9 Comparison of responses between nonlinear and linear control laws (with input voltage variation)

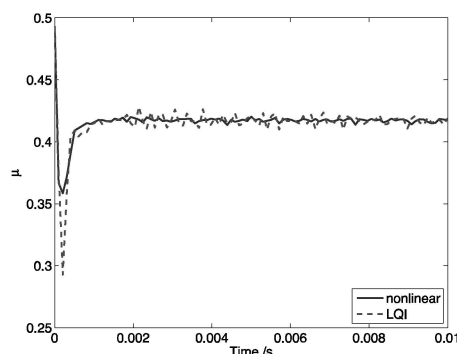
のステップ (i) におけるデューティ比を（抵抗と入力電圧に変化がない場合に対して）実験により正確に求め、ステップ (iv) における偏差系の基準となる平衡点もまた実験で求めた正確な値を利用した場合の実験を行ってみた。Fig. 9 に対応する回路（入力電圧が 3.3V に変化した場合）のときの線形制御則のもとの応答がどのように変化したかを Fig. 10 に示す。図中の非線形制御則の場合の応答は、Fig. 9 のものと同じである。出力電圧の応答は、立ち上がり時におけるわずかな差を除いて、両方の制御則ではほぼ一致していることがわかる。Fig. 7, Fig. 8 に対応する回路の場合にはこの差はさらにわずかなものとなることが確認できている。ただし、Fig. 10 にも示されている通り、いずれの回路においても、制御入力（デューティ比）の応答は非線形制御においてはやはり滑らかさが大きく改善されるとともにピーク値が大きく抑えられており、いわば“制御の安定感”を感じさせるものとなっている。

このような観察から考えられることとして、以下の三つをあげることができる。

- 目標電圧を得るためのデューティ比を実験的に知ることができたならば達成できるような制御性能を導く設計が、同定モデルのみに基づいて可能であることを意味していることから、第 I 部 [6] での同定モデルの有効性を改めて示す結果である。



(a) Output voltage



(b) Duty cycle

Fig. 10 Comparison of responses between nonlinear and modified linear control law (with input voltage variation)

- 非線形性を直接扱う設計を行うことは、総合的に見てよりよい制御性能の達成につながりうることを示唆している。
- 本論文で示した(12)式は安定化制御則であるというだけであって、また、(24)式は安定化制御則であるかどうかの検証を本論文の議論に基づいて行うべきものであって、無限区間上の評価関数のもとでの制御則の最適性を論じた結果として得られたわけではない。本論文の議論を最適性まで考慮した設計にまで高めることができれば、線形制御則をさらに上回る性能を達成できる可能性が残されている。

最後の点については、連続時間双線形系に対する[9]での議論に対応する形で、(12)式を適当な状態依存の重みをもつ評価関数のもとでの最適制御則であると解釈することができると考えられる。また、そのような視点からさらに踏み込んだ議論ができる可能性が期待されるが、詳細については今後の課題としたい。

6. おわりに

本論文では離散化双線形モデルに基づき、ブーストコンバータ出力電圧の積分補償付非線形制御則を導出した。また、導出した制御則による閉ループ系の安定解析法を述べた。最後に、制御実験により、離散化双線形モデル

ならびにそれに基づく積分補償付非線形制御則の有効性を検証した。

参考文献

- [1] R. W. Erickson: *Fundamentals of Power Electronics*, Springer (1997)
- [2] 引原, 千葉, 木村, 大橋: エース「パワーエレクトロニクス」, 朝倉書店 (2000)
- [3] 原田, 二宮, 願: スイッチングコンバータの基礎, コロナ社 (2007)
- [4] C. Olalla, I. Queinnec, R. Leyva and A. El. Aroudi: Robust optimal control of bilinear DC-DC converters; *Control Engineering Practice*, Vol. 19, No. 7, pp. 688–699 (2011)
- [5] A. G. Beccuti, S. Mariethoz, S. Cliquennois, S. Wang and M. Morari: Explicit model predictive control of DC-DC switched-mode power supplies with extended Kalman filtering; *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, No. 3, pp. 1864–1874 (2009)
- [6] 後藤, 蛸原, 萩原: 離散化双線形モデルに基づくブーストコンバータ出力電圧の積分補償付非線形制御—I—モデル化と同定; システム制御情報学会論文誌, 第28巻, 第7号, pp. 320–329 (2015)
- [7] M. Vidyasagar: *Nonlinear Systems Analysis* (2nd Ed.), Prentice Hall (1993)
- [8] H. K. Khalil: *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company (1992)
- [9] M. Kanazawa, S. Nakaura and M. Sampei: Inverse optimal control problem for bilinear systems: Application to the inverted pendulum with horizontal and vertical movement; *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, pp. 2260–2267 (2009)

著者略歴

後藤 とうりょう 蛸原 良介
本論文誌 p.329 参照。

蛸原 はら よしお 義雄 (正会員)
本論文誌 p.329 参照。

萩原 はぎわら ともみち 朋道 (正会員)
本論文誌 p.329 参照。